Lösungen zu den Tutoriumsaufgaben

T1. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

Lösung Wir schreiben die stückweise Definition von $|x|$:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Nun suchen wir für die zwei Defintionen passende Stammfunktionen. Für $x > 0$ finden wir

$$F_{>}(x) = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x(x)$$

mit $F'_{>}(x) = x = f(x)$ für $x > 0$. Für $x < 0$ finden wir

$$F_{<}(x) = -\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x(-x)$$

mit $F'_{<}(x) = -x$ für $x < 0$.

Wir können für $F_{\lesseqgtr}(x)$ auch eine einheitliche Definition finden:

$$F_{\lesseqgtr}(x) = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}x(x) & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2}x(-x) & \text{für } x < 0 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}x|x|$$

Somit ist die allgemeine Stammfunktion von $|x|$

$$F(x) = \frac{1}{2}x|x| + C$$

wobei C eine Konstante ist.

T2. Berechnen Sie

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x$$

mit partieller Integration.

Lösung Wir verwenden Satz 3.10 und setzten $f(x) = x$ und $g'(x) = \sin(x)$. Dann ist $f'(x) = 1$ und $g(x) = -\cos(x)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x &= -x\cos(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1(-\cos(x))\mathrm{d}x = \\ &= -\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{-\pi}{2}\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = \\ &= -(0-0) + sin(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= 1-(-1) = 2\end{aligned}$$

T3. Berechnen Sie

$$\int_a^b e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Substitutionsregel.

Lösung Wir würden gerne den Ausdruck $\sqrt{x}$ vereinfachen. Da die zu integrierende Funktion nur Werte ≥ 0 für x erlaubt, können wir davon ausgehen, dass dies auch für die Integrationsgrenzen a und b gilt, und wir müssen bei der Substitution nicht auf das Vorzeichen achten.

Wir substituieren $\sqrt{x}$ durch t und verwenden Satz 3.7 und setzen $x =: \phi(t) = t^2$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x} \\ x &= t^2 \\ \phi(t) &= t^2 \\ \phi'(t) &= 2t \\ \mathrm{d}x &= 2t\mathrm{d}t \\ \phi(\sqrt{a}) &= a \\ \phi(\sqrt{b}) &= b \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Gleichung in Satz 3.7 (rückwärts) anwenden und den Ausdruck vereinfachen. Im letzten Schritt verwenden wir die Linearität des Integrals, um die 2 vor das Integral zu schreiben.

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{\sqrt{x}} \quad \mathrm{d}x \quad = \int_{\phi(\sqrt{a})}^{\phi(\sqrt{b})} e^{\sqrt{x}} \quad \mathrm{d}x \quad &= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{\sqrt{\phi(t)}} \cdot \phi'(t) \quad \mathrm{d}t = \\ &= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{\sqrt{t^2}} \cdot 2t \quad \mathrm{d}t \\ &= 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} t \cdot e^t \quad \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Nun wenden wir wieder Satz 3.10 an und setzen $f(t) = t$ und $g'(t) = e^t$. Dann ist $f'(t) = 1$ und $g(t) = e^t$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} t \cdot e^t \quad \mathrm{d}t \quad &= 2\left(te^t \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} - \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} 1 \cdot e^t \quad \mathrm{d}t \right) = \\ &= 2\left(te^t \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} - e^t \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \right) = \\ &= 2\left(e^t(t-1) \Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \right) = \\ &= 2\left(e^{\sqrt{b}}(\sqrt{b}-1) - e^{\sqrt{a}}(\sqrt{a}-1) \right)\end{aligned}$$

Eine alternative Vorgehensweise ist es, die Integrationsgrenzen vorerst zu ignorieren und nach der Substitution und partiellen Integration eine Resubstitution durchzuführen, um die Stammfunktion zu berechnen und schließlich an den ursprünglichen Integrationsgrenzen auszuwerten.

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = ... = 2\int_a^b te^t \mathrm{d}t \Big|_{t=\sqrt{x}} = ... &= 2\left[e^t(t-1) \Big|_{t=\sqrt{x}} \right]_a^b = \\ &= 2\left[e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) \right]_a^b = \\ &= 2\left(e^{\sqrt{b}}(\sqrt{b}-1) - e^{\sqrt{a}}(\sqrt{a}-1) \right)\end{aligned}$$